Terminator Calcul algébrique
Jean-Michel Pouré

Résumé

Ne dites pas à ma mère que je suis un Terminator, elle me croit dans les assurances.

Table des matières

1. Introduction

L'objectif de ce livre se résume en un mot : Terminator.

D'une part, notre objectif est de devenir « l'ami des nombres », donc de comprendre comment ils fonctionnent. Ce document synthétise toutes les règles de calcul algébrique nécessaires pour poursuivre des études de niveau BAC+2 à BAC+5. Si vous comprenez et maîtrisez les techniques décrites dans ce document, vous avez « terminé » votre formation initiale en calcul algébrique. Généralement, en France, c'est à partir de la classe de seconde qu'on termine cette formation initiale. Quand j'étais enfant, je me souviens avoir terminé ma formation initiale en classe de troisième, avec quelques compléments en classe de seconde. Mais on peut apprendre à tout âge.

D'autre part, ce document a également pour objectif de faire de vous un automate à calculer, en vous donnant les outils d'un « Terminator ». Toutes les règles de manipulation des expressions algébriques sont décrites. Vous avez tous les outils en mains.

Enfin, j'ai intitulé ce document Terminator parce que c'est un clin d'oeil. C'est que je souhaite conquérir votre coeur et que je vous encourage à vous réconcilier avec les mathématiques et à les aimer.

1.1. A qui s'adresse ce livre ?

Ce livre est destiné à tous, sans distinction :

— Aux bons et aux excellents élèves du collège et du lycée, qui souhaitent parfaire leurs connaissances en calcul algébrique. Si une technique en particulier n'est pas décrite, vous pouvez me le signaler et je l'ajouterai à l'ouvrage. L'objectif est d'avoir de bonnes bases pour les classes de première et de terminale, et également d'être à l'aise dans les études supérieures et de viser les meilleurs filières (je pense aux classes préparatoires scientifiques ou commerciales, et à médecine) et d'en avoir l'ambition.

— Aux élèves de collège et de lycée ayant un niveau moyen en mathématiques, et qui risquent soit d'abandonner les mathématiques, soit d'être ralentis dans leurs études par leur manque de connaissances. En France, seules quelques rares filières comme le droit sont accessibles sans faire de mathématiques. Dans les autres filières, même si on a arrêté les mathématiques en classe de première ... on doit souvent les reprendre dans le supérieur. Donc mieux vaut poursuivre l'étude des mathématiques en première, quitte à choisir mathématiques en option en terminale.

— Aux élèves de collège et de lycée ayant des difficultés en mathématiques, qui ont avant tout besoin de comprendre les fondements du calcul. J'ai accordé un soin spécifique à expliquer en détail le fonctionnement des nombres et j'espère que ces élèves me comprendront. A titre personnel, je considère que lorsqu'on est capable d'additionner deux nombres se trouvant sur les deux doigts de la main, on peut faire des mathématiques de haut niveau. Mais beaucoup d'élèves n'ont pas conscience de leurs capacités et se découragent avant même d'avoir commencé.

— Aux parents d'élèves, qui souhaitent expliquer les mathématiques à leurs enfants, mais ne trouvent pas d'ouvrage adapté.

— Aux adultes qui reprennent leurs études et préparent un concours de niveau BAC à BAC+2 et souhaitent se remettre à niveau en calcul algébrique, sans nécessairement utiliser un ouvrage trop théorique.

— Aux élèves entrant dans une formation de niveau BAC+2 à BAC+5 et qui souhaitent se mettre à niveau ou compléter leurs connaissances. C'est pour cela que je qualifie cette formation d'initiale.

— Aux élèves vivant à l'étranger dans un pays où la formation en mathématiques n'est pas développée ou n'ayant pas accès à une formation en mathématiques de bon niveau ou n'ayant pas les moyens économiques d'étudier. Ce livre est un raccourci qui décrit le fonctionnement des nombres et introduit à l'algèbre.

— Aux éducateurs qui sont assez âgés pour se souvenir qu'enfants nous noircissions des cahiers entiers de calculs avant d'envisager de faire des problèmes et autres tâches complexes. Certains éducateurs sont à la recherche d'une méthode d'enseignement traditionnelle, mais modernisée. Ce livre est pour eux.

1.2. Mode d'emploi

Ce document est destiné à parfaire les connaissances de base dans le domaine du calcul algébrique.

Une connaissance n'a que trois statuts : « Je maîtrise parfaitement », « Je ne suis pas certain de savoir », « Je ne sais pas ». Tout ce qui n'est pas maîtrisé parfaitement doit être étudié.

Posez vous également les questions « Qu'est-ce qu'on attend de moi ? » et « Pourquoi ce concept est-il jugé aussi important qu'il fait partie du Terminator de calcul algébrique ». Vous devez toujours comprendre ce que l'on attend de vous et pourquoi on vous demande de comprendre et d'apprendre un concept (sinon cela n'a aucun sens). Même si vous ne maîtrisez pas complètement un concept, si vous avez compris pourquoi il est important, c'est déjà la moitié du chemin et le reste viendra naturellement avec le temps.

1.3. Schéma mental

Le calcul algébrique repose sur le calcul en général. Des travaux de recherches démontrent qu'il existe une corrélation entre la bonne maîtrise du calcul en général et la bonne maîtrise du calcul algébrique.

Dans le document, on accorde donc une place privilégiée aux bases de calcul. Mais entendons-nous bien : bien calculer, c'est comprendre les nombres et cela suppose une bonne représentation mentale.

Le schéma mental est un concept difficile à définir, mais si l'on prend l'exemple du drapeau aux trois couleurs bleu-blanc-rouge, on sait instantanément, en le regardant, qu'il s'agit des couleurs de la France. Quand vous jouez aux échecs, vous manipulez les pions sans avoir besoin de lire les règles du jeu et chaque déplacement de pion a un sens. Il en va de même des mathématiques. Les opérations de base doivent avoir un sens immédiat.

Selon la personnalité de chacun, on privilégiera :

— La verbalisation (le fait de prononcer les nombres et calculs).

— La représentation géométrique (dessiner sur axe gradué).

— La manipulation d'objets courants comme des jetons.

Par exemple, quand vous additionnez 3 et 2, vous réunissez cinq jetons. Si vous vous construisez un schéma mental de chaque concept décrit dans ce document, c'est gagné.

Nous demandons au lecteur à privilégier la simplicité et je dis souvent à mes élèves que « les mathématiques consistent à faire uniquement des choses simples, mais d'un porté théorique et pratique profonde ».

1.4. Remerciements

Je remercie les professeurs, l'équipe de direction et les élèves du lycée Jean-Jacques Rousseau à Montmorency, un lycée où j'enseigne avec grand plaisir. J'ai écrit cet ouvrage en me remémorant ma formation initiale, je remercie donc mes professeurs de m'avoir enseigné la signification et l'usage des nombres et du calcul.

1.5. Commentaires et corrections

Ce livre est en cours d'écriture et il n'est pas terminé. Vous pouvez m'envoyer vos commentaires et vos questions à mon adresse de courriel académique et j'y répondrai dans la mesure du possible : jean-michel.poure@ac-versailles.fr.

2. Règles de base du calcul

Cette première partie ne contient volontairement aucune expression littérale (des lettres et des formules symbolisant un calcul), puisqu'elles n'ont pas été introduites. Le lecteur doit se persuader qu'on peut très bien calculer sans utiliser d'expression littérale, donc qu'il est important de savoir calculer, y compris dans la vie courante. Par ailleurs, comme l'objectif est de développer des schémas mentaux, on a même souhaité éviter le recours au calcul littéral.

2.1. Chiffres, nombres, partie entière et partie décimale

Définition 1. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 et 9 sont des chiffres. 123 est un nombre composé de trois chiffres.

Propriété 1. On peut décomposer un nombre en indiquant sa partie entière et sa partie décimale. La virgule sépare la partie entière de la partie décimale.

Exemple. Voici le nombre $10,2$ représenté dans un tableau de décomposition décimale :

Partie entière									Partie décimale		
Millions			Milliers			Unités					
Centaines	Dizaines	Unités	Centaines	Dizaines	Unités	Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes	Centièmes	Millièmes
							1	0	2		

Propriété 2. Quand on multiplie un nombre par 10, on décale le nombre d'une colonne vers la gauche dans le tableau de décomposition décimale. Quand on divise un nombre par 10, on décale le nombre d'une colonne vers la droite dans le tableau de décomposition décimale.

Exemple. Voici le nombre $10,2 \times 10 = 102$ représenté dans un tableau de décomposition décimale :

Partie entière									Partie décimale		
Millions			Milliers			Unités					
Centaines	Dizaines	Unités	Centaines	Dizaines	Unités	Centaines	Dizaines	Unités	Dixièmes	Centièmes	Millièmes
						1	0	2			

Schéma mental. On calcule $10,2 \times 10 = 102$ en déplaçant la virgule d'une position vers la droite. En fait, il faut comprendre que la virgule reste bien fixe dans le tableau, c'est le nombre qui se décale. On peut aussi penser au jeu de la marchande consistant à décomposer des nombres en billets et pièces de monnaie. Par exemple, 10, 2€ se décompose en un billet de 10€ et deux pièces de 10 centimes. Quand je multiplie par 10, je remplace les pièces de 10 centimes par des pièces de 1€, les pièces de 1€ par des billets de 10€, les billets de 10€ par des billets de 100€ et ainsi de suite.

2.2. Diviseurs et multiples

Propriété 3. Comme $6 = 3 \times 2$:
- 6 est multiple de 3 et de 2.
- 6 est divisible par 3 et par 2.
- 2 et 3 sont des diviseurs de 6.

Schéma mental. Je dispose de 6 jetons. Je peux distribuer 2 tas égaux de 3 jetons ou 3 tas égaux de 2 jetons, sans reste.

Propriété 4. Si un nombre est multiple de plusieurs nombres, alors il est divisible par n'importe lequel de ces nombres.

Exemple. Si $2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ alors je peux écrire que $2 \times 3 \times 4 = \dfrac{120}{5}$. Le nombre 120 est multiple de 2, 3, 4 et 5. Donc 120 est divisible par 5. On verra plus loin que cette propriété est des fondements de la résolution d'équations.

2.3. Tables de multiplication

On connaît les tables de multiplication :

$\times$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	2	4								
3	3	6	9							
4	4	8	12	16						
5	5	10	15	20	25					
6	6	12	18	24	30	36				
7	7	14	21	28	35	42	49			
8	8	16	24	32	40	48	56	64		
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Propriété 5. Quand on a un trou de mémoire, on peut utiliser le résultat précédent et compléter la table par addition. Exemple : Si j'ai oublié $6 \times 7 = 42$, je peux calculer $6 \times 6 = 36$, ajouter 6 et obtenir 42.

Remarque. On doit aussi connaître ses tables « à l'envers », ce qui sera très utile pour simplifier des fractions. Par exemple, si on vous présente le nombre 45, vous devez savoir qu'il est égal à 9×5. C'est une question d'entraînement.

2.4. Critères de visibilité

Il est utile de connaître les critères de divisibilité pour :
- 2 : il s'agit des nombres pairs.
- 3 : on additionne les chiffres d'un nombre, le total doit être divisible par 3.
- 5 : tout nombre se terminant par 0 ou 5.
- 9 : on additionne les chiffres d'un nombre, le total doit être divisible par 9.
- 10 : tout nombre se terminant par 0.

Exemple. Le nombre 123123 est divisible par 3. En effet, $1 + 2 + 3 + 1 + 2 + 3 = 12$ est divisible par 3 (il se trouve dans la table de 3). Donc 123123 est divisible par 3.

Schéma mental. L'intérêt des critères de divisibilité est qu'on n'a pas besoin de faire une division à la calculette pour vérifier qu'un nombre est divisible. On utilise cette technique pour savoir rapidement si deux nombres ont un diviseur commun.

Exemple. Le nombre 124 est divisible par 2 car pair. Le nombre 240 est divisible par 2 pour la même raison. Donc 124 et 240 ont comme diviseur commun 2 (mais il peut y en avoir d'autres). On utilisera cette propriété pour simplifier des fractions ou factoriser une expression, comme expliqué plus loin dans l'ouvrage.

2.5. Carrés parfaits

On connaît les carrés parfaits de 1 à 12, qui se lisent dans la diagonale :

- $1^2 = 1$
- $2^2 = 4$
- $3^2 = 9$
- $4^2 = 16$
- $5^2 = 25$
- $6^2 = 36$
- $7^2 = 49$
- $8^2 = 64$
- $9^2 = 81$
- $10^2 = 100$
- $11^2 = 121$
- $12^2 = 144$

On en déduit les valeurs des racines, par exemple : $\sqrt{81} = 9$.

Schéma mental. Un carré de côté de 9 unités a une surface de $9 \times 9 = 81$ unités d'aire. C'est l'origine du terme « carré ».

2.6. Nombres premiers

Définition 2. Un nombre entier naturel (supérieur ou égal à 2) est un nombre premier s'il admet exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même.

On connaît les nombres permiers jusqu'à 19 : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19. Au lycée, jusqu'à 13 suffit dans la pratique.

2.7. Signe d'un nombre

Propriété 6. Le signe d'un nombre indique sa position par rapport à zéro. Un nombre est positif s'il est supérieur ou égal à zéro ; il est négatif s'il est inférieur ou égal à zéro. Le nombre zéro est donc à la fois positif et négatif.

Exemple. 3 est un nombre positif.

Exemple. -5 est un nombre négatif.

Schéma mental. Les nombres peuvent être représentés sur une droite graduée, à la manière d'un thermomètre. 3 degrés indique une température positive. -5 degrés indique une température négative.

Propriété 7. Tout nombre écrit seul est supposé positif et peut s'écrire avec ou sans signe plus.

Exemple. 3 et $+3$ sont le même nombre. Cependant, on écrit de préférence 3.

Schéma mental. A la boulangerie, on dit « 3 baguettes s'il vous plait » et non « +3 baguettes s'il vous plait ».

2.8. Opposé

Propriété 8. Un nombre négatif est l'opposé du même nombre positif :
-5 est l'opposé de $+5$.
$+5$ est l'opposé de -5

Schéma mental. Géométriquement, un nombre et son opposés sont symétriques par rapport à zéro. On verra que cela a de l'importance par la suite.

Propriété 9. Pour une bonne lisibilité, on veille à écrire -7 au lieu de $-(+7)$ ou $+(-7)$.On dit : « Il fait -3 degrés » et non « Il fait $-(+3)$ degrés. »

Propriété 10. Prendre deux fois l'opposé d'un nombre revient à une opération blanche.

Exemple. $-(-3) = 3$

Exemple. $-(-(-4)) = -4$

Schéma mental. Géométriquement, appliquer une même symétrie deux fois, c'est revenir au point de départ. Pour s'en souvenir, on prend l'exemple de la bascule d'un interrupteur de la lumière de classe. Basculer deux fois l'interrupteur, c'est revenir à l'état d'origine.

Propriété 11. On en déduit la propriété qu'un nombre pair de signes « $-$ » équivaut à un signe « $+$ » et qu'un nombre impair de signes « $-$ » équivaut à un signe « $-$ ». Dans la pratique, vous rencontrerez très peu d'expressions algébriques comportant plus de deux signes« $-$ » accolés.

Exemple. $-(-(-3)) = -3$ car l'expression à gauche comporte un nombre impair de signes « $-$ ».

2.9. Valeur absolue

Définition 3. La valeur absolue d'un nombre est sa distance par rapport à zéro. $|3|$ se lit valeur absolue de 3.

Exemple. La distance de 0 à 4 est de quatre unités. Donc $|4| = 4$.

Exemple. La distance de 0 à -2 est de deux unités. Donc $|-2| = 2$.

Propriété 12. On déduit de ces deux exemples la règle de calcul de la valeur absolue : quand un nombre est positif, sa valeur absolue est égale au nombre. Quand un nombre est négatif, sa valeur absolue est égale à son opposé. Reprenons les précédents exemples :

Exemple. 4 est un nombre positif, donc $|4| = 4$.

Exemple. -2 est un nombre négatif, donc $|-2| = -(-2) = 2$ (c'est l'opposé de -2).

Schéma mental. On place un nombre sur un axe gradué. On mesure sa distance du nombre à zéro à l'aide d'une petite cordelette. La longueur de la cordelette est toujours positive, donc la valeur absolue est toujours positive. Quand le nombre est positif, la valeur absolue est évidente, c'est le nombre. Quand le nombre est négatif, on « enlève » le signe négatif du nombre pour le « rendre » positif (on prend l'opposé).

Propriété 13. La valeur absolue d'une différence entre deux nombres mesure la distance entre deux nombres.

Exemple. $|5 - 2| = |3| = 3$. Donc la distance entre 5 et 2 est de 3 unités.

Exemple. $|5 - (-1)| = |5 + 1| = 6$. Donc la distance entre 5 et -1 est de 6 unités.

Schéma mental. Pour s'en persuader, on place des nombres sur un axe gradué et on mesure la distance entre deux nombres et on la compare à la valeur absolue de leur différence. On vérifie que cela fonctionne pour n'importe quel nombre positif ou négatif.

2.10. Additions et soustractions

Propriété 14. Toute soustraction peut s'exprimer sous forme d'une addition.

Exemple. $4 - 3 = 4 + (-3) = 1$

Schéma mental. Pour s'en convaincre, on déplace un petit cheval sur un échiquier. L'opération 4 déplace le cheval de quatre cases vers la droite. L'opération $+(-3)$ déplace le cheval de trois cases vers la gauche. Le résultat est 1. On peut aussi utiliser l'exemple du thermomètre.

Propriété 15. Comme toute addition peut s'exprimer sous forme d'une soustraction, les additions et soustractions ont même priorité opératoire. Par conséquent, quand un calcul contient uniquement des additions et des soustractions (sans parenthèses), on peut les réorganiser dans n'importe quel ordre. On veille à bien déplacer chaque nombre ET le signe qui le précède.

Exemple. $1 + 4 - 5 = -5 + 1 + 4$

Schéma mental. On retiendra qu'il n'existe qu'un opérateur + et l'on considérera qu'une soustraction est potentiellement une addition, donc qu'elle répond aux mêmes règles.
Autrement dit, « il n'existe que des additions » car les soustractions sont des additions.

2.11. Multiplication et division

Propriété 16. Une multiplication est un « gros tas » d'additions :

Exemple. $3 \times 5 = 3 + 3 + 3 + 3 + 3$ (on addition cinq fois trois).

Propriété 17. Toute division peut s'exprimer sous forme d'une multiplication.

Exemple. $3 \div 5 = 3 \times \frac{1}{5}$. Diviser un nombre par 5, c'est le multiplier par $\frac{1}{5}$.

Propriété 18. Comme une division peut s'exprimer sous forme d'une multiplication, les multiplications et les divisions ont même priorité opératoire. Par conséquent, quand un calcul contient uniquement des multiplications et des divisions, on peut les réorganiser dans n'importe quel ordre. On veille à bien déplacer chaque nombre ET le signe qui le précède.

> **Définition 4.** Pour mieux comprendre cette propriété, on introduit la notion d'inverse. $\frac{1}{3}$ est l'inverse de 3. Réciproquement 3 est également l'inverse de $\frac{1}{3}$.

Propriété 19. Diviser par un nombre, c'est multiplier par l'inverse de ce nombre. Multiplier par un nombre, c'est diviser par l'inverse de ce nombre.

Propriété 20. Il en découle et on doit connaître par coeur que :
- diviser par $\frac{1}{10} = 0,1$ c'est multiplier par 10
- diviser par $\frac{1}{100} = 0,01$ c'est multiplier par 100
- multiplier par $\frac{1}{10} = 0,1$ c'est diviser par 10
- multiplier par $\frac{1}{100} = 0,01$ c'est diviser par 100

Propriété 21. On ne peut pas diviser un nombre par zéro, le résultat tendant vers l'infini. Pour s'en convaincre, diviser un nombre à la calculatrice par 0,01. Diviser par 0.01 c'est multiplier par 100. Et ainsi de suite.

Schéma mental. On accorde une importance particulière à retenir que diviser par zéro est extrêmement dangereux et totalement interdit. Vous pouvez penser au résultat de la calculatrice qui indique un dépassement de capacité. Vous pouvez également penser à une catastrophe intersidérale. Si on parvenait à diviser 1 par 0, le temps et l'espace se distordraient et l'univers serait pulvérisé. Quand j'étais lycée et que l'on divisait par zéro, notre copie valait zéro. C'est une catastrophe très localisée, mais tout cela doit vous rappeler que diviser par zéro est strictement impossible et même dangereux.

Schéma mental. On retiendra qu'il n'existe qu'un opérateur $\times$ et l'on considérera mentalement qu'un division est potentiellement une multiplication, donc qu'elle répond aux mêmes règles. Autrement dit, « il n'existe que des multiplications ».

2.12. Calculer dans le bon sens

Schéma mental. Un certain nombre de règles consistent à calculer « dans le bon sens ». On visualise un axe gradué allant du $-$ à gauche vers le $+$ à droite, avec des nombres rangés dans l'ordre croissant du plus petit (à gauche) au plus grand (à droite). Quand on calcule, on essaye de visualiser le sens du calcul, c'est à dire grossièrement si l'on se déplace vers le $+$ (à droite) ou vers le $-$ (à gauche). Quand on se déplace vers la droite de l'axe, on se déplace vers un nombre plus grand. Quand on se déplace vers la gauche de l'axe, on se déplace vers un nombre plus petit.

Dans tout calcul, il peut être intéressant de connaître le signe du résultat (positif ou négatif) et de savoir si le résultat est plus petit ou plus grand que le nombre de départ. Quand on se trompe de sens de calcul, c'est comme si l'on roulait sur une route ou une autoroute à contresens, cela peut avoir des conséquences fâcheuses.

Tout comme la latéralisation (connaître sa main gauche et sa main droite), tout le monde n'est pas doté de ce sens inné, et il faut parfois réfléchir quelques secondes pour trouver un résultat. Tant qu'on n'est pas à l'aise dans ce type de calcul, on s'exercera avec un petit cheval ou un objet quelconque le long d'un axe gradué. Par exemple une feuille de cahier d'écolier et un stylo font très bien l'affaire.

Propriété 22. Quand on additionne deux nombres positifs, le résultat est positif et supérieur aux deux nombres de départ.

Exemple. $4 + 3 = 7$

Schéma mental. Pour s'en convaincre, on manipule un petit cheval deux fois vers l'axe des $+$ (vers la droite). On déplace deux fois le petit cheval vers la droite. Le résultat est positif et supérieur aux deux nombres de départ.

Propriété 23. Quand on additionne deux nombres négatifs, le résultat est négatif et inférieur aux deux nombres de départ.

Exemple. $-4 + -3 = -7$

Schéma mental. Pour s'en convaincre, on manipule un petit cheval deux fois vers l'axe des $-$ (vers la gauche). On déplace deux fois le petit cheval vers la gauche. Le résultat est négatif et inférieur aux deux nombres de départ.

Propriété 24. Quand on additionne un nombre positif et un nombre négatif, le résultat suit la règle suivante : on considère d'abord la valeur absolue des deux nombres, c'est à dire leur distance à zéro. On calcule la différence entre la plus grande valeur absolue et la plus petite valeur absolue. Le nombre ayant la plus grande valeur absolue indique le signe du résultat. Deux exemples sont plus parlants :

Exemple. $4 - 3 = 4 + (-3) = 1$ car les deux valeurs absolues sont 4 et 3 et la différence de la plus grande valeur absolue et de la plus petite valeur absolue est $4 - 3 = 1$. Le signe du résultat est celui du nombre ayant la plus grande valeur absolue, c'est à dire $+$. Au final, on obtient $+1$, c'est à dire 1.

Schéma mental. On doit considérer ce type de calcul comme un déplacement le long d'un axe gradué et s'aider d'un objet pour comprendre le calcul. Quand on effectue le calcul 4, on place le petit cheval en 4. Quand on effectue le calcul $+(-3)$, on déplace le petit cheval de 3 positions vers le $-$ c'est à dire vers la gauche. Le résultat est $4 - 3 = 1$ et c'est un résultat positif car en faisant -3, le petit cheval ne franchit pas la frontière du zéro.

Exemple. $3 - 4 = 3 + (-4) = -1$ car les deux valeurs absolues sont 4 et 3 et la différence de la plus grande valeur absolue et de la plus petite valeur absolue est $3 - 4 = 1$. Le signe du résultat est celui du nombre -4 ayant la plus grande valeur absolue, c'est à dire $-$. Au final, on obtient -1

Schéma mental. On doit considérer ce type de calcul comme un déplacement le long d'un axe gradué et s'aider d'un objet pour comprendre le calcul. Quand on effectue le calcul 3, on place le petit cheval en 3. Quand on effectue le calcul $+(-4)$, on déplace le petit cheval de 4 positions vers le $-$ c'est à dire vers la gauche. Le résultat est $3 - 4 = -1$ et c'est un résultat négatif car en faisant -4 le petit cheval a franchi la frontière du zéro.

Propriété 25. Quand on multiplie deux nombres positifs entre eux, le résultat est positif.

Exemple. $3 \times 2 = 6$

Schéma mental. On sait que $3 \times 2 = 3 + 3$. Donc on déplace le petit cheval deux fois de 3 positions dans le sens positif, vers la droite, et on le pose sur 6.

Propriété 26. Quand on multiplie deux nombres négatifs entre eux, le résultat est positif.

Exemple. $(-3) \times (-2) = -(-(3 \times 2)) = 3 \times 2 = 6$

Schéma mental. D'abord, on sait que le signe négatif est en fait l'opération $\times(-1)$. Donc $(-3)\times(-2) = (-1)\times3\times(-1)\times2$. Comme aucune opération n'est prioritaire, on peut réorganiser l'ordre, et placer les signes négatifs en tête : $(-3) \times (-2) = (-1) \times (-1) \times 3 \times 2 = -(-(3 \times 2))$. Ensuite, on utilise la règle du double interrupteur ou de la double symétrie pour comprendre que $-(-))$ est une opération blanche et trouver la solution. On retiendra qu'un multipliant deux nombres négatifs entre eux, on se retrouve dans le « sens positif ».

Propriété 27. Quand on multiplie un nombre positif et un nombre négatif entre eux, le résultat est négatif.

Exemple. $(-3) \times 2 = -3 \times 2 = -6$

Exemple. $3 \times (-2) = -3 \times 2 = -6$

Schéma mental. On commente uniquement le calcul $(-3) \times 2 = -3 \times 2 = -6$ D'abord, on sait que le signe négatif est en fait l'opération $\times(-1)$. Donc $(-3) \times 2 = (-1) \times 3 \times 2$. Comme aucune opération n'est prioritaire, on peut réorganiser l'ordre, et placer les signes négatifs en tête : $(-3) \times -2 = (-1) \times 3 \times 2 = -3 \times 2$. Le résultat est -6. On retiendra qu'un multipliant un nombre positif et un nombre négatif entre eux, on se retrouve dans le « sens négatif ».

Propriété 28. En multipliant ou en divisant un nombre de départ par 1, on obtient comme résultat le nombre de départ.

Exemple. $1234,56 \times 1 = 1234,56$

Exemple. $\dfrac{1234,56}{1} = 1234,56$

Exemple. $\pi \times 1 = \dfrac{\pi}{1} = \pi$

Schéma mental. Multiplier ou diviser par 1 est une opération blanche. Le raisonnement est évident pour la multiplication. Si l'on considère qu'une division est une opération de partage, diviser $1234,56$€ entre une personne revient à lui donner $1234,56$€.

Propriété 29. En multipliant un nombre de départ positif par un nombre strictement supérieur à 1, on obtient un résultat positif et strictement supérieur au nombre de départ.

Exemple. $3 \times 2 = 6$ où 3 est le nombre de départ, 2 est strictement supérieur à 1, donc le résultat $3 \times 2 = 6$ est un nombre positif et strictement supérieur au nombre de départ 3.

Schéma mental. Quand on a multiplié par 2, on a additionné deux fois la valeur de départ. Le résultat est donc supérieur à la valeur de départ.

Exemple. $3 \times 1,1 = 3,3$ où 3 est le nombre de départ, $1,1$ est strictement supérieur à 1, donc le résultat $3 \times 1,1 = 3,3$ est un nombre positif strictement supérieur au nombre de départ 3.

Schéma mental. Quand on a multiplié par $1,1$. On utilise le fait que $1,1 = 1 + 0,1$. On a additionné la valeur de départ et $0,1\times$ la valeur de départ. Le résultat est donc supérieur à la valeur de départ.

Exemple. $3 \times 0,5 = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$ où 3 est le nombre de départ, $0,5$ est strictement inférieur à 1, donc le résultat $1,5$ est strictement inférieur au nombre de départ 3.

Schéma mental. Quand on multiplie par un nombre strictement compris ente 0 et 1, on divise par un nombre supérieur à 1. Le résultat est donc inférieur à la valeur de départ.

Exemple. $3 \times (-2) = -6$ où 3 est le nombre de départ, -2 est strictement inférieur à 1, donc le résultat $3 \times (-2) = -6$ est strictement inférieur au nombre de départ 3.

Schéma mental. La règle des signes $+ \times - = -$ explique que le résultat est négatif, donc inférieur à la valeur de départ.

Schéma mental. On retiendra que lorsque l'on multiplie un nombre de départ positif par un nombre supérieur à 1, on obtient comme résultat un nombre supérieur au nombre de départ, donc on se déplace vers un nombre plus grand. Il s'agit d'un résultat naturel que notre cerveau comprend immédiatement, car nous avons l'habitude de multiplier les objets. Toutefois, si dans la nature, on multiplie des objets par des nombres supérieurs ou égaux à 2 (exemple : un homme préhistorique dispose de 3 haches, mais il a besoin de 6 haches pour partir à la chasse, donc il multiplie 3 par 2, tout en sachant qu'avec 6 haches, il en a plus que 3 au départ), en mathématiques la règle vaut pour une multiplication par un nombres strictement supérieur à 1 (quand je multiplie un nombre positif par un nombre strictement supérieur à 1 j'obtiens plus que le nombre de départ). C'est le résultat le plus important à retenir.

Par contre, quand on multiplie un nombre positif par un nombres inférieur à 1, on obtient un nombre inférieur au nombre de départ, donc on se déplace vers un nombre plus petit. Ce calcul est moins évident pour notre cerveau, qui a besoin de réfléchir. C'est un résultat moins important à retenir, mais on pourra quand même s'en servir.

2.13. Ordre de grandeur

Schéma mental. Une amie physicienne m'a raconté qu'un élève de faculté à qui l'on avait demandé de calculer la distance de la terre à la lune avait trouvé comme résultat $3,84$ cm alors qu'il s'agit d'environ 384 400 km. Les principes de l'ordre de grandeur sont simples : vérifier que le résultat est cohérent avec l'unité utilisée et ne résulte pas d'une erreur grossière.

Exemple. $9,1 \times 10 = 91$ est cohérent car le résultat est proche de $9 \times 10 = 90$

Exemple. La distance à vol d'oiseau Lille-Nice de 833 mètre n'est pas cohérente, car c'est la distance que l'on marche pour aller acheter du pain et non pour se déplacer de Lille à Nice. Il s'agit de 833 km.

Exemple. $10^3 = 100$ est faux car on on sait qu'en élevant 10 au cube, on multiplie 10 par 10×10, donc on déplace la virgule de 2 positions. Et l'on doit savoir que $10^3 = 1000$.

Schéma mental. La seule manière de juger d'un ordre de grandeur, c'est de connaître quelques résultats de référence par coeur et de se ramener à des calculs approchés sur des valeurs connues, celles des tables de multiplication ou les puissances de 10. On doit raisonner comme lorsque l'on verse de l'eau dans un récipient : qu'est-ce qui est cohérent et ne va pas faire déborder le résultat ? Il faut donc juger de la taille de ce que l'on manipule et de la taille du résultat obtenu.

2.14. Division euclidienne

Définition 5. Une division euclidienne définit une situation de partage. La quantité à partager est appelée dividende et le nombre de parts le diviseur. La quantité par part est appelé le quotient. La division est euclidienne lorsque le dividende, le diviseur et le quotient sont entiers.

Exemple. $32 = 3 \times 10 + 2$.
32 est le dividende.
3 est le diviseur.
10 est le quotient.
2 est le reste.

Schéma mental. Je dispose d'un jeu de 32 cartes. Je les distribue une par une, à part égale, à chacun des trois joueurs. Chaque joueur reçoit 10 cartes. Il en reste 2 non-distribuées qu'on laisse dans un pot. Comme il reste un pot, 32 n'est pas divisible par 3.

2.15. Priorité de la multiplication sur l'addition

Propriété 30. Dans un calcul sans parenthèse, la multiplication (donc la division puisque c'est la même chose) est prioritaire sur l'addition (donc la soustraction puisque c'est la même chose). On retient : « La multiplication est prioritaire sur l'addition ».

Exemple. $4 \times 3 + 1 = 12 + 1 = 13$

Exemple. $8 \div 2 - 1 = 2 - 1 = 1$

Schéma mental. Une multiplication est un « gros tas » d'additions. C'est normal qu'elle soit prioritaire sur des additions. Attention, en réalité la priorité est une convention, mais ici il s'agit d'un schéma mental.

2.16. Parenthèses

Propriété 31. Une parenthèse indique une priorité de calcul (supérieure à la priorité de la multiplication et à la priorité de l'addition). Par exemple : $-(5-1)$. On effectue d'abord le calcul $5 - 1 = 4$ puis on calcule l'opposé. Donc $-(5-1) = -4$

Propriété 32. Une parenthèse sépare aussi des signes $-$ et $+$ qui pourraient venir à se chevaucher. C'est l'explication de l'écriture de $-(-1))$ que l'on n'écrit jamais sous la forme $--1$ de peur que cela soit illisible.

Schéma mental. Les parenthèses ont une forme englobante, qui rassemble des calculs à effectuer en priorité. Pour rassembler des objets posés sur un bureau, j'ouvre les bras et je les referme sur ces objets.

2.17. Distributivité

Propriété 33. La multiplication (donc la division) est dite distributive par rapport à l'addition (donc la soustraction). On retient « La multiplication est distributive par rapport à l'addition » en apprenant un exemple simple : $3 \times (4 + 5) = 3 \times 4 + 3 \times 5$ et l'on peut même tracer des flèches en début d'apprentissage pour comprendre le mécanisme.

Propriété 34. La distributivité transforme une multiplication en addition.

Exemple. $4 \times (3 + 5) = 4 \times 3 + 4 \times 5 = 12 + 20 = 32$

Schéma mental. Je dispose de quatre sachets contenant trois bonbons bleus et cinq bonbons rouges. Je distribue les bonbons à mes amis. Il y a 4×3 bonbons bleus et 4×5 bonbons rouges.

Propriété 35. En remarquant qu'un signe $-$ devant une parenthèse est égal à $-1\times$, on découvre un moyen de supprimer les parenthèses par distributivité.

Exemple. $-(6-5) = -1 \times (6-5) = -1 \times 6 - 1 \times (-5) = -6 - (-5) = -6 + 5$

Propriété 36. On a redécouvert la propriété apprise au collège indiquant qu'on peut enlever une parenthèse si elle est précédée du signe $+$, mais que si la parenthèse est précédée du signe $-$, on prend l'opposé des calculs dans la parenthèse.

Exemple. $+(5-4) = 5 - 4 = 1$ car la parenthèse est précédée du signe $+$. On peut donc l'enlever.

Exemple. $-(7-3) = -7 - (-3) = -7 + 3 = -4$ car la parenthèse est précédée du signe $-$. Pour l'enlever, on écrit l'opposé de chaque terme compris dans la parenthèse.

Schéma mental. On déplace un petit cheval le long d'une droite graduée. Le déplacement $7-3$ correspond à 7 cases vers la droite et 3 cases vers la gauche. Si je souhaite le même déplacement, mais dans le sens opposé, c'est à dire calculer $-(7-3)$, je dois déplacer mon petit cheval de 7 cases vers la gauche et de 3 cases vers la droite. Donc $-(7-3) = -7 + 3$.

2.18. Factorisation

Propriété 37. La factorisation est l'opération inverse de la distributivité. Il s'agit de transformer une addition en multiplication.

Exemple. $4+8 = 2\times 2 + 2 \times 4 = 2 \times (2+4) = 2 \times 6$. On dit que 2×6 est la forme factorisée et $4+8$ la forme développée. Cela a surtout un sens en calcul littéral (lire plus bas).

Schéma mental. Je souligne le facteur commun et je l'extrais. Il s'agit plus d'une technique de calcul. On doit bien comprendre le déplacement du 2 dans le précédent exemple.

2.19. Fractions

> **Définition 6.** Une fraction est une division (ou quotient) d'un nombre par un autre. Au lycée et dans l'enseignement supérieur, on exprime les divisions sous forme de fractions, en écrivant de préférence $\dfrac{2}{3}$ plutôt que $2 \div 3$. La partie « haute » d'une fraction se nomme numérateur, la partie « basse » dénominateur.

Propriété 38. Comme la fraction est une division, on la calcule lorsque son résultat est entier.

Exemple. On écrit $\dfrac{4}{2} = 2$ car 2 est un entier.

Exemple. Annoncer comme résultat final $\dfrac{-4}{1}$ fait toujours mauvaise impression. On écrit bien évidemment -4. C'est la règle du « faire simple ».

Propriété 39. En règle générale, une fraction ne se calcule pas, mais se simplifie en une faction irréductible, et il faut chercher une décomposition en nombres premiers ou simplifier par le plus grand diviseur commun. C'est là qu'il est important de connaître ses tables de multiplication et ses critères de divisibilité.

Exemple. $\dfrac{25}{40} = \dfrac{5 \times 5}{5 \times 8} = \dfrac{5}{8}$ car 25 et 40 sont tous deux divisibles par 5.

Propriété 40. Une fraction est dite irréductible lorsque le nominateur et le dénominateur sont premiers entre eux, c'est à dire qu'ils n'ont aucun facteur commun. En d'autres termes, on ne peut pas poursuivre la simplification de la fraction.

Exemple. Dans l'exemple précédent, $\dfrac{5}{8}$ est une faction irréductible, car le numérateur 5 n'a aucun facteur commun avec le dénominateur 8.

Propriété 41. Par soucis de simplicité, quand une faction comporte un seul signe négatif, on a l'habitude de le mettre devant la fraction (bien qu'on puisse l'indiquer au numérateur ou au dénominateur).

Exemple. On écrit de préférence $-\dfrac{2}{3}$, bien que $\dfrac{-2}{3}$ et $\dfrac{2}{-3}$ soient les mêmes nombres.

Schéma mental. En effet, si on a bien compris que le signe négatif peut être remplacé par $(-1)\times$, on constate que les nombres 2, 3 et l'expression $(-1)\times$ ont même priorité opératoire (celle de la multiplication). On peut donc choisir d'exprimer $(-1)\times$ en premier, ce qui revient à placer le signe $-$ devant la fraction.

On sait simplifier les principales fractions de 100. Les valeurs sont évidentes, puisqu'il s'agit de déplacer la virgule :

— $\frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$
— $\frac{25}{100} = \frac{1}{4} = 0,25$
— $\frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 0,3$
— $\frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0,4$
— $\frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5$
— $\frac{60}{100} = \frac{3}{5} = 0,6$
— $\frac{75}{100} = \frac{3}{4} = 0,75$
— $\frac{80}{100} = \frac{4}{5} = 0,8$

2.20. Addition de fractions

Propriété 42. Pour additionner deux fractions, on les met au même dénominateur. On veille à ce que le résultat soit bien irréductible. Il faut s'entraîner.

Exemple. $\dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{5} = \dfrac{1 \times 5}{3 \times 5} + \dfrac{2 \times 3}{5 \times 3} = \dfrac{5+6}{15} = \dfrac{11}{15}$

Schéma mental. On représente les fractions sous forme de camemberts. On ne peut additionner des parts ensemble que lorsque les camemberts ont la même décomposition. On peut également penser à deux pizzas. La première est diviser en quarts. La deuxième est diviser en demis. Je dois tout exprimer en quarts pour additionner des parts de pizzas.

2.21. Multiplication de fractions

Propriété 43. Pour multiplier une fraction par un nombre, je place le nombre au nominateur.

Exemple. $5 \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3} = \dfrac{2+2+2+2+2}{5} = \dfrac{5 \times 2}{3}$

Propriété 44. Pour multiplier deux fractions entre elles, je multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

Exemple. $\dfrac{9}{7} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{9 \times 2}{7 \times 3} = \dfrac{18}{21}$

Propriété 45. Pour calculer l'inverse d'une fraction, on permute nominateur et dénominateur.

Schéma mental. On utilise l'expression « prendre l'inverse d'une fraction, c'est inverser une fraction » car elle est imagée. On image que la fraction fait une pirouette.

Exemple. $\dfrac{1}{(\frac{2}{3})} = \dfrac{3}{2}$

Propriété 46. Pour diviser deux fractions entre elles, on multiplie la première fraction par l'inverse de la deuxième fraction.

Exemple. $\dfrac{\frac{9}{7}}{\frac{2}{3}} = \dfrac{9}{7} \times \dfrac{3}{2} = \dfrac{9 \times 3}{7 \times 2} = \dfrac{27}{14}$

Schéma mental. On fait le signe V de la victoire avec ses deux mains. On place ses mains l'une en dessous de l'autre. Puis on renverse le V de la main du dessous et on la place côte à côte de la première main. Je l'ai montré en cours et je ferai des photos.

2.22. Pourcentage

Propriété 47. Un pourcentage est l'expression d'une fraction dont le dénominateur est 100. Pour s'en convaincre, on verbalise une fraction en utilisant le terme *pour* en imaginant la barre de fraction.

Exemple. 15% est la fraction $\dfrac{15}{100}$ et l'on verbalise « 15 pour 100 ». Donc c'est le résultat de la faction, soit $0,15$.

Schéma mental. Quand on lit un nombre tel que $0,15$, on doit s'entraîner à lire 15% sans qu'il soit nécessaire de multiplier ce nombre par 100. D'ailleurs, quand on utilise un logiciel tableur, on saisit $0,15$ dans une cellule, puis on choisit l'affichage sous forme de pourcentage. Mais on ne modifie pas la valeur de $0,15$. La raison est qu'on a besoin de cette valeur pour réaliser des calculs, comme indiqué ci-dessous :

Propriété 48. Prendre une fraction d'un nombre, c'est multiplier le nombre par la fraction.

Exemple. $\dfrac{2}{5} \times 700 = \dfrac{2 \times 700}{5}$ représente les deux cinquièmes d'un gâteau de 700 grammes.

Propriété 49. Par conséquent, prendre le pourcentage d'un nombre, c'est multiplier le nombre par le pourcentage.

Exemple. $\dfrac{15}{100} \times 700 = \dfrac{15 \times 700}{100}$ représente 15% d'un gâteau de 700 grammes.

2.23. Carré

Définition 7. Elever un nombre au carré, c'est le multiplier par lui-même.

Schéma mental. Le carré est une notion géométrique. Pour obtenir l'aire d'un carré, je multiplie la longueur du côté par elle-même. D'où le terme carré.

Propriété 50. Un carré et plus généralement une puissance s'appliquent immédiatement là où ils sont « posés ».

Exemple. $1 + 3^2 = 1 + 3 \times 3 = 1 + 9$ car le carré est posé sur le 3.

Exemple. $1 - 3^2 = 1 - 3 \times 3 = 1 - 9$ car le carré est posé sur le 3 et non sur le $-$.

Exemple. $1 + (-3)^2 = 1 + (-3) \times (-3)$ car le carré est posé la parenthèse qui « englobe » -3.

Schéma mental. C'est la règle du « chapeau » dont je vous ai parlé en classe. Un carré est comme un chapeau : si je le pose sur ma tête, il est posé uniquement sur ma tête. Si je le pose sur le bureau, il est posé uniquement sur le bureau. Et il s'applique uniquement là où il est posé. Comme le carré est placé en hauteur, légèrement sur le côté (on dit « à l'exposant »), il ne s'applique que là où il est posé.

2.24. Racines carrées

Définition 8. La racine carrée de 9 est le côté d'un carré d'une aire de 9 unités. Il s'agit d'un côté de 3 unités. Par conséquent $\sqrt{9} = \sqrt{3 \times 3} = 3$.

Propriété 51. La racine carrée est une notion géométrique. Comme la racine carrée se calcule à partir d'une aire, elle ne peut être calculée qu'à partir d'une valeur positive et son résultat est toujours positif.

Exemple. $\sqrt{5}$ est toujours positif.

Exemple. Ecrire $\sqrt{-10}$ n'est pas possible, car il n'existe aucun carré de surface de -10 unités.

Schéma mental. On dessine un carré de 9 unités d'aire et on indique la longueur de 3 unités du côté. Quand on écrit une racine carrée, on veille à ne jamais utiliser une expression négative sous la racine. Cela doit générer une crainte comparable à la division par zéro.

Propriété 52. Un carré d'une surface de 3 unités a par définition un côté de $\sqrt{3}$. Donc son aire est $\sqrt{3} \times \sqrt{3}$. Par conséquent : $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$

Propriété 53. Des deux précédentes propriétés, on déduit que $\sqrt{3 \times 3} = \sqrt{3} \times \sqrt{3}$.

2.25. Puissances

Propriété 54. Pour calculer la puissance d'un nombre, on multiplie le nombre par lui-même autant de fois qu'indiqué par le nombre placé à l'exposant. Les règles de priorité opératoire sont celles du carré.

Exemple. 3^4 se lit « trois puissance 4 » (ancienne appellation) ou « 3 exposant 4 » (expression à la mode de nos jours), et se calcule $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$. Le nombre 3 est le nombre dont on calcule la puissance. 4 est le nombre placé à l'exposant. Sur un cahier d'écolier, on place la ligne des exposants sur la troisième ligne en hauteur, légèrement en décalage sur la droite par rapport au nombre.

Schéma mental. Une erreur classique consiste à considérer qu'on multiplie le nombre par son exposant. Ecrire par exemple que $3^4 = 3 \times 4$ est un erreur classique à ne pas commettre. Le résultat correct est $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$.

Propriété 55. Quand l'exposant est égal à 1, il s'agit du nombre.

Exemple. $3^1 = 3$

Schéma mental. Une erreur classique consiste à considérer que $3^1 = 3 \times 1$. Bien que le résultat 3 soit correct, une puissance n'est pas égale au nombre multiplié par l'exposant.

Propriété 56. Une puissance négative est l'inverse d'une puissance positive. En aucun cas, le signe négatif indique un nombre négatif.

Exemple. $3^{-4} = \frac{1}{3 \times 3 \times 3 \times 3}$ est bien un nombre positif.

Propriété 57. Multiplier des puissances d'un même nombre, c'est additionner les exposants.

Exemple. $2^3 \times 2^4 = (2 \times 2 \times 2) \times (2 \times 2 \times 2 \times 2) = 2^{3+4} = 2^7$

Exemple. $2^3 \times 2^{-4} = 2^{3-4} = 2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$

Schéma mental. Les puissances sont des multiplications, mais elles se manipulent comme des additions à l'exposant. On visualise que les puissances sont placées légèrement en hauteur par rapport aux nombres (on dit « à l'exposant »), sur les carreaux de vos cahiers d'écolier, en hauteur sur la troisième ligne. C'est là qu'on réalise les additions et les soustractions.

Propriété 58. Le nombre zéro élevé à n'importe quelle puissance strictement positive est égal à zéro.

Exemple. $0^{10} = 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 \times 0 = 0$

Schéma mental. Comme disait un de mes professeurs de mathématiques : « zéro fois zéro fait la tête à toto ». Même un milliard de fois zéro fait zéro. Car multiplier par zéro revient à ne rien faire. Si je souhaite donner 1000 euros à chacun de mes enfants, mais que je n'ai aucun enfant, je leur donne au total $0 \times 1000 = 0$ euro, c'est à dire rien.

Propriété 59. Par convention, tout nombre à la puissance zéro est égal à 1. Dans la nature, le calcul à la puissance zéro n'existe pas. C'est une convention, car ce choix de la valeur 1 permet de réaliser certains calculs d'addition et de soustraction à l'exposant.

Exemple. En particulier, on peut écrire par exemple : $2^0 = 2^{5-5} = 2^5 \times 2^{-5} = \dfrac{2^5}{2^5} = 1$

Propriété 60. Il n'existe pas de consensus concernant la valeur de 0^0, on dit que son résultat est indéterminé. Pour certains, $0^0 = 1$, alors que pour d'autres il n'existe pas de réponse.

Schéma mental. En effet, si l'on écrit $0^0 = 0^{5-5} = \dfrac{0^5}{0^5} = \dfrac{0}{0}$, on constate qu'il existe une division potentielle par zéro, ce qui est strictement interdit.

Propriété 61. Pour calculer la puissance de puissances, on multiplie les puissances entre elles.

Exemple. $(2^3)^4 = (2^3) \times (2^3) \times (2^3) \times (2^3) = 2^{3+3+3+3} = 2^{3\times 4} = 2^{12}$

Exemple. $(2^3)^{-4} = \dfrac{1}{(2^3)^4} = \dfrac{1}{2^{3\times 4}} = 2^{-3\times 4} = 2^{-12}$

Propriété 62. Il est également utilise de savoir décomposer une puissance à partir des facteurs qui la composent.

Exemple. $6^4 = (3\times 2)^4 = (3\times 2)\times(3\times 2)\times(3\times 2)\times(3\times 2) = (3\times 3\times 3\times 3)\times(2\times 2\times 2\times 2) = 3^4\times 2^4$

2.26. Notation scientifique

Propriété 63. On connaît par coeur les puissances positives de 10 suivantes :
- $10^3 = 1000$ (un millier)
- $10^6 = 1000000$ (un million)
- $10^9 = 1000000000$ (un milliard)

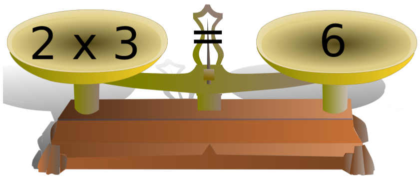
Exemple. $9 \times 10^3 = 9000$

Propriété 64. On connaît par coeur les puissances négatives de 10 suivantes :
- $10^{-1} = 0,1$
- $10^{-2} = 0,01$
- $10^{-3} = 0,001$

2.27. Egalité

Propriété 65. Quand deux valeurs sont égales, on peut écrire un signe = entre elles. Le résultat du calcul à gauche de l'expression doit être le même que le résultat à droite de l'expression. Quand les valeurs concordent, on dit que l'égalité est « vérifiée » ou « vraie ». Quand une égalité n'est pas vérifiée, on peut dire qu'elle est « fausse ».

Schéma mental. On visualise une balance de Roberval à l'équilibre. Ci-dessous, la représentation de l'égalité $2 \times 3 = 6$. Sur le plateau de gauche, on place un poids de 2×3. Sur le plateau de droite, on place un poids de 6. La balance est à l'équilibre.



Exemple. $4 \times 3 = 6 \times 2$ est une égalité vérifiée car la valeur de part et d'autre du signe égal est 12.

Exemple. $4 \times 2 = 9$ est une égalité fausse, car la valeur à gauche du signe égal est 8 et la valeur à droite de l'égalité est 9.

Propriété 66. Quand deux valeurs sont différentes, on utilise le symbole $\neq$, qui se lit « différent de ».

Exemple. $4 \neq 5$ indique que quatre est différent de cinq.

2.28. Inégalité

Propriété 67. Quand une expression est strictement inférieure à une autre expression, on utilise le symbole $<$ qui se lit « strictement inférieur à ». Le terme « inférieur à » utilisé dans la vie courante est à proscrire, car il n'est pas assez précis.

Exemple. $4 < 6$ se lit « 4 est strictement inférieur à 6 ». Le terme « strictement inférieur » signifie que 4 est inférieur et ne pourra jamais être égal à 6.

Propriété 68. Une inégalité se lit de gauche à droite, mais aussi de droite à gauche. Dans ce cas, on recopie chaque nombre accompagné de son signe.

Schéma mental. $-4 < 6 + 4 - 1$ se lit également de droite à gauche $6 + 4 - 1 > -4$.

Propriété 69. Le symbole $\leqslant$ se lit « inférieur ou égal ». La valeur de gauche est soit strictement inférieure, soit égale, à la valeur de droite. Il suffit qu'une des deux conditions soit réalisée pour que l'inégalité soit vérifiée. Quand on lit le symbole $\leqslant$, il est important de verbaliser « inférieur » ou « égal » et de visualiser les deux symboles $<$ ou $=$.

Exemple. $4 \leqslant 6$ est vérifiée, car l'inégalité $4 < 6$ est bien vérifiée. Cette seule condition suffit.

Exemple. $2 \times 4 \leqslant 8$ est vérifiée, car l'égalité $2 \times 4 = 8$ est bien vérifiée. Cette seule condition suffit.

Exemple. $3 \leqslant 2$ n'est pas vérifiée car 3 n'est pas strictement inférieur ni égal à 2.

Propriété 70. Le symbole $>$ se lit « strictement supérieur ». Le symbole $\geqslant$ se lit « supérieur ou égal ». Leur utilisation suit les mêmes règles qu'expliquées précédemment, qu'on adaptera.

2.29. Calcul approché

Propriété 71. Pour donner le résultat approché d'un calcul, on utilise le symbole $\approx$, qui se lit « presque égal » à ou « environ égal à » et on précise la précision du calcul, généralement en utilisant des puissances négatives de 10. La précision du calcul est toujours un nombre positif. La distance du nombre à valeur approximée doit être inférieure ou égale à la précision.

Exemple. $\frac{1}{3} \approx 0,33$ à 10^{-2} près (donc à $0,01$ près). On a toujours $|\frac{1}{3} - 0,33| \leqslant 10^{-2}$

Schéma mental. Comme la valeur absolue mesure une distance, la distance entre $\frac{1}{3}$ et $0,33$ est inférieure ou égale à $10^{-2} = 0,01$.

2.30. Méthodes de calcul

Poser ses calculs On pose ses calculs en lignes ou en colonnes. Quand on débute, il est recommandé de poser ses calculs en colonnes, bien que cela relève d'un choix personnel.

Exemple. Nous allons calculer $Aire = 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7$ en colonnes :

$$\begin{aligned} Aire &= 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 \\ &= 5 + 9 + 6 + 7 \\ &= 14 + 13 \\ &= 27 \end{aligned}$$

On remarque que les calculs sont alignés sur le symbole =. Le premier terme de l'égalité, *Aire*, celui de gauche, apparaît en haut à gauche suivi du signe égal. Ensuite, on n'a pas besoin de répéter le terme de gauche de l'égalité, car il est implicite (mais si on le répète, ce n'est pas une erreur).

La règle de calcul est la suivante : on calcule par blocs. Par exemple, on a additionné $2 + 3$ et l'on a inscrit 5 dans la deuxième ligne en dessous. On procède de même pour $4 + 5$ et l'on indique 9 dans la deuxième ligne. Quand on n'effectue pas un calcul, on le recopie. Par exemple, on recopie le calcul $6 + 7$ dans la deuxième ligne.

Schéma mental. On utilise l'expression « abaisser un calcul », qui est une expression imagée, qui signifie qu'on effectue un calcul ou qu'on recopie un calcul restant à effectuer. L'idée sous-jacente est que chaque ligne conserve la même valeur et qu'elle s'abaisse. Un peu à la manière du générique du film Matrix, les nombres coulent de haut en bas et s'abaissent.

Bien doser la calcul posé, calcul instrumenté et le calcul mental Il faut bien doser le calcul posé, le calcul instrumenté (la calculette) et le calcul mental.

Généralement, on considère que tous les calculs relevant des tables de multiplication, des fractions et des astuces de calcul sont à réaliser en calcul mental. Pour le reste, on privilégie le calcul posé. Les calculs comportant des virgules doivent de préférence être effectués à la calculette, par exemple $12,3 \times 1,12$. Tous les calculs intermédiaire doivent figurer sur papier. De cette manière, en cas d'erreur de calcul, la perte de points sera minimale.

Exemple. On écrit : $6 \times 2 + 7 \times 4 = 12 + 28 = 40$ en séparant bien chaque étape de calcul.

Exemple. Par contre, on évite de calculer mentalement directement, sauf si l'on est très à l'aise : $6 \times 2 + 7 \times 4 = 40$. On écrira plutôt : $6 \times 2 + 7 \times 4 = 12 + 28 = 40$

Vous devez connaître votre vitesse de calcul et choisir la méthode la plus rapide et la plus sûre.

Relecture Quand les calculs sont biens posés, on peut se relire de haut en bas, et pourquoi pas quand on est très à l'aise en calcul, de bas en haut.

3. Evaluer ses connaissances en calcul

A ce stade, évaluez vos connaissances en répondant par « oui », par « peut-être » ou par « non » à ces questions :

— Je connais les tables de multiplication (y compris à l'envers), les carrés parfaits jusqu'à 144 et les nombres premiers jusqu'à 19.

— J'ai compris qu'il n'existe que des additions et des multiplications au sens « large ». Toutes les règles pour l'addition valent pour la soustraction. Toutes les règles pour la multiplication valent pour la division.

— J'ai compris que le signe $-$ indique un sens de parcours négatif, le signe $+$ un sens de parcours positif.

— Je comprends la notion d'opposé. J'ai compris qu'un nombre et son opposé étaient symétriques par rapport à 0.

— Je sais séparer par une parenthèse des signes qui pourraient se chevaucher et devenir illisibles : $-(-5)$ et non $--5$.

— Je sais que la multiplication est prioritaire sur l'addition. On retient $2+3\times 4=2+12$.

— Je sais que la parenthèse indique une priorité opératoire absolue. On retient $4-(6-4)=4-2$.

— Je sais que la multiplication est distributive par rapport à l'addition. On retient $2\times(3+4)=2\times 3+2\times 4$.

— J'ai compris que signe négatif devant une parenthèse se distribue et équivaut à $\times(-1)$.

— Je comprends la règles des signes dans une addition et une multiplication, et je sais évaluer lorsque c'est possible si le résultat final sera inférieur ou supérieur aux nombres initiaux.

— J'ai compris qu'un carré s'applique immédiatement où il est posé.

— Je sais qu'on calcule une fraction quand le résultat est entier, sinon on la simplifie en une fraction irréductible.

— Je sais que pour additionner deux fractions, on les réduit au même dénominateur.

— J'ai compris que prendre l'inverse d'une fraction, c'est l'inverser.

— Je sais que pour multiplier deux fractions, on multiplie les numérateurs entre eux et les dénominateurs entre eux.

— Je sait manipuler des racines carrées.

— Je sais manipuler les puissances et la notation scientifique.

— Je comprends le sens d'une égalité et d'une inégalité. Je sais lire les symboles utilisés pour l'inégalité stricte.

— Je sais exprimer un résultat approché.

— Je sais calculer en colonnes et abaisser mes résultats. Si je calcule en lignes avec exactitude, c'est bien aussi. Mais en cas de doute sur mes capacités, je calcule en colonnes.

— Je sais doser l'usage du calcul mental, du calcul posé et de la calculatrice.

Tout ce qui n'est pas parfaitement compris a vocation à être travaillé. Le plus important, c'est de comprendre les concepts et de vous construire un schéma mental. Avec le temps et l'habitude, si vous avez un schéma mental, vous allez acquérir les compétences, cela ne fait aucun doute.

Donc ne vous découragez-pas et passez au chapitre suivant.

4. Calcul algébrique

Dans ce chapitre, on évite tout formalisme excessif, qui est introduit de manière progressive.

4.1. Principes

Propriété 72. Dans un calcul, on peut remplacer n'importe quel nombre par une lettre de l'alphabet romain ou grec. De préférence, on utilise une lettre minuscule car les majuscules sont utilisées en géométrie pour définir des objets, mais on n'y est pas strictement obligé.

Schéma mental. Il faut se convaincre qu'une lettre a bien une valeur et qu'elle est destinée à recevoir une valeur, et ne pas la considérer comme une notion trop abstraite. Cette valeur est généralement inconnue, d'où l'expression « inconnue » pour la désigner. Quand on verbalise en prononçant le nom de la lettre, on imagine qu'il s'agit d'un nombre.

Exemple. L'inconnue x est utilisée dans l'expression algébrique $(x+1)$. x est un nombre. Donc $(x+1)$ est ce nombre plus 1.

Schéma mental. Prononcez « x ». Prononcez « $(x+1)$ ». Imaginez n'importe quel nombre pour x et prononcez ce nombre. Maintenant ajoutez 1 à ce nombre et prononcez-le à voix haute.

Propriété 73. Toutes les règles de calcul vues précédemment s'appliquent au calcul algébrique.

4.2. Multiplication implicite

Propriété 74. Quand deux lettres se suivent, il existe une multiplication implicite entre elle. La raison est simple : le terme « $\times$ » de la multiplication ressemble trop à « x » pour qu'on l'utilise entre deux lettres, ce qui pourrait introduire des erreurs de calcul.

Exemple. ab se calcule et équivaut à $a \times b$. Bien entendu, on n'écrit jamais $a \times b$ pour éviter toute ambiguïté.

Exemple. On écrit de préférence $\dfrac{5a}{b}$ et jamais $5 \times \dfrac{a}{b}$ pour éviter toute ambiguïté.

4.3. Variables et constantes

D'un simple point de vue du vocabulaire, dans une expression algébrique, on peut distinguer des « variables » et des « constantes ». Cette distinction relève surtout du vocabulaire, car mathématiquement, ce sont des inconnues.

Exemple. Dans la droite $y = ax + b$, x et y sont désignées comme des variables car on étudie leurs variations, alors que a et b sont constants et qu'ils sont fixes.

Sans que cela soit obligatoire, les mathématiciens ont l'habitude d'utiliser de préférence certaines lettres dans des exercices précis. Les cas sont trop nombreux pour être décrits.

Exemple. Les variables x et y désignent souvent l'abscisse et l'ordonnée dans une expression algébrique.

4.4. Signe d'une expression algébrique

Propriété 75. A priori, sauf dans certains cas évidents, on ne connaît pas le signe d'une expression algébrique.

Exemple. Les signes de $+x$ et de $-x$ sont inconnus a priori. C'est une erreur de partir du principe qu'un simple $+$ indique un résultat positif et qu'un simple $-$ indique un résultat négatif.

Propriété 76. Le signe de $-x$ est opposé au signe de x. Si x est positif, $-x$ est négatif. Si x est négatif, $-x$ est positif.

4.5. Formules de géométrie à connaître

Schéma mental. S'il faut connaître quelques formules de géométrie par coeur, c'est qu'elles sont utiles dans la vie courante, mais également qu'elles permettent de se construire une représentation mentale du calcul algébrique.

Dans les petites classes, on s'aidera d'une paire de ciseaux et l'on découpera les figures géométriques pour compter les unités d'aire. La maîtrise est suffisante dès lors vous êtes capable de visualiser ou de reconnaître sans vous tromper la formule algébrique des principales figures géométriques. Cela fonctionne comme le drapeau français, cela doit être immédiat.

Il est également utile de verbaliser les formules de géométrie. Vous pouvez les prononcer une fois avec les lettres et ensuite remplacer chaque lettre par un nombre. Cela permet de comprendre que les lettres ont bien une valeur.

Notation

— Le périmètre, noté P, est la longueur du contour d'une figure.
— L'aire, notée A, est la mesure de la surface d'une figure en unités d'aires.
— La largeur est notée l.
— La longueur est notée L.
— La hauteur est notée h.
— π se lit « Pi » et a comme valeur approchée $3,14$.
— Le rayon d'un cercle est noté r.
— Le diamètre d'un cercle est noté d et vaut deux fois le rayon, donc $d = 2r$.

Apprenez-bien ces formules car nous les utiliserons pour résoudre des équations et des inéquations :

Rectangle

Propriété 77. $P = 2L + 2l = 2(L + l)$

Propriété 78. $A = L \times l$

Schéma mental. On trace un rectangle sur du papier d'écolier et l'on compte les carreaux. On remarque la factorisation du 2 dans la formule du périmètre.

Carré

Propriété 79. $P = 4L$

Propriété 80. $A = L \times L = L^2$

Schéma mental. On trace un carré sur du papier d'écolier et l'on compte les carreaux.

Triangle

Propriété 81. $A = \dfrac{h \times L}{2}$

Schéma mental. On trace un rectangle et on place un point sur un des côtés. On relie ce point au côté opposé par deux segments pour obtenir un triangle. On découpe le rectangle et le triangle et on constate par recoupement que l'aire du triangle est la moitié de l'aire du rectangle.

Cercle et disque

Propriété 82. $P = \pi \times d = \pi \times 2r$ (il faut connaître les deux formules).

Propriété 83. $A = \pi \times r \times r = \pi \times r^2$

Schéma mental. Il est courant de confondre les deux formules du périmètre du cercle et de l'aire du disque, qui comportent chacune π, 2 et r. Pour éviter toute confusion, on remarque qu'une aire est toujours exprimée en unités d'aire, qui sont des carrés unitaires. Dans la formule de l'aire A=$\pi \times r \times r = \pi \times r^2$, il y a bien un carré. Donc c'est bien la formule de l'aire du disque. On déduit par élimination que l'autre formule $P = \pi \times d = \pi \times 2r$ est celle du périmètre du cercle.

4.6. Mettre un problème en équation

> **Définition 9.** Une équation est un expression algébrique comportant un signe égal. Une équation comporte un programme de calcul générique, qui se suit les règles de calcul élémentaires étudiées précédemment.

Exemple. Un programme de calcul consiste à prendre un nombre, à le doubler et à ajouter 5. Quelle est l'équation indiquant le résultat y en fonction du nombre de départ x ?

Solution : le programme de calcul commence par doubler le nombre x de départ, donc on obtient $2x$. Ensuite on ajouter 5. Au final on obtient $2x + 5$. Soit y le résultat. L'équation peut s'écrire $y = 2x + 5$.

Exemple. On construit une maison de forme rectangulaire, deux fois plus longues que large. Quelle est l'aire A en fonction de la largeur l de la maison ?

Solution : l'équation de l'aire peut s'écrire $A = 2l \times l$, soit $A = 2l^2$.

Exemple. Soit deux nombres a et b. Exprimer l'équation formulant la proposition suivante : « la distance entre a et b est strictement inférieure à 5 ».

Solution : on a vu que la distance entre deux nombres était la valeur absolue de la différence des deux nombres. On verbalise en nommant a et b les deux nombres, donc $a - b$ est leur différence et $|a - b|$ est la valeur absolue de leur différence. Cette distance doit être strictement inférieure à 5. Donc il s'agit de l'équation $|a - b| < 5$.

4.7. Faire une applications numérique

Propriété 84. Une équation est une invitation à effectuer un calcul en remplaçant les lettres par leur valeur (mais pas seulement, on le verra plus loin). Les règles de calcul sont celles du calcul élémentaire. C'est pour cela qu'il est important de bien calculer. On utilise aussi l'expression « faire une application numérique » pour indiquer qu'on calcule la valeur d'une équation pour une valeur donnée.

Exemple. Je calcule $y = (2x + 1)(3x - 2)$ pour la valeur $x = 1$:

$$\begin{aligned} y &= (2x + 1)(3x - 2) \\ &= (2 \times 1 + 1) \times (3 \times 1 - 2) \\ &= 3 \times 1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Le programme de calcul consiste à d'abord à calculer $(2\times1+1)$ et $(3\times1-2)$, puis à calculer 3×1.

Schéma mental. Pour calculer une expression algébrique, on la prononce une première fois avec l'inconnue, puis on la prononce à nouveau en remplaçant l'inconnue par sa valeur. On peut aussi imaginer que l'inconnue est un réceptacle destiné à recevoir une valeur. Quand vous faites une application numérique, vous ≪ injectez ≫ la valeur dans l'équation. L'inconnue est alors remplacée pour la valeur injectée. Vous pouvez visualiser une seringue si cela vous aide, en imaginant que la valeur à injecter s'y trouve.

Propriété 85. A chaque étape de calcul, la valeur à gauche du signe égal doit être égale à la valeur à droite du signe égal.

Exemple. Dans l'exemple précédent, chaque expression à gauche et à droite de l'équation a pour valeur 3. Les termes y, $(2x+1)(3x-2)$, $(2\times1+1)\times(3\times1-2)$, 3×1 et 3 sont tous égaux à 3.

Schéma mental. Vous pouvez imaginer que vous cuisinez un gâteau. Au début, vous réunissez les ingrédients : des oeufs, de la farine, du chocolat, du beurre, de l'eau, etc ... Tous ces ingrédients ont un poids. On considère que l'expression algébrique de gauche, c'est le poids des ingrédients et que l'expression algébrique de droite, c'est le poids du gâteau final. A chaque étape de calcul, on utilise un signe égal. A chaque étape de préparation du gâteau : choix des ingrédients, mélange des ingrédients, cuisson - le poids total reste inchangé. On a toujours le même poids à gauche de l'égalité (au début) qu'à droite de l'égalité (à la fin).

Exemple. Soulignons tout de suite une erreur classique, qui consiste à calculer chaque terme de manière séparée, en utilisant le signe égal. Attention, ce qui suit est faux :

$$\begin{aligned} y &= (2x+1)(3x-2) \\ &= (2\times1+1) \\ &= 3 \\ &= (3\times1-2) \\ &= 1 \\ &= 3\times1 \\ &= 3 \end{aligned}$$

Donc y a deux valeurs 3 et 1, ce qui est impossible. On doit toujours veiller à conserver la même valeur à gauche et à droite de l'équation.

4.8. Factoriser une expression algébrique

Propriété 86. Factoriser consiste à transformer une expression algébrique en produit.

Schéma mental. En utilisant les critères de divisibilité, les tables de multiplication et les nombres premiers, vous devez être capable de repérer les facteurs communs d'une expression. On souligne les facteurs communs, puis on les ≪ extrait ≫, pour les placer en tête de l'expression. Il s'agit en fait du procédé inverse de la distributivité. En période d'apprentissage, on peut souligner les facteurs communs à extraire, mais ce n'est pas une notation admise, juste une aide au calcul.

Exemple. Factoriser $2x+6$:

$$\begin{aligned} 2x+6 &= \underline{2}x+\underline{2}\times 3 \\ &= 2(x+3) \end{aligned}$$

Exemple. Distribuer $2(x+3)$:

$$\begin{aligned} 2(x+3) &= 2x+2\times 3 \\ &= 2x+6 \end{aligned}$$

Schéma mental. Les deux précédents exemples illustrent que la factorisation est l'opération inverse de la distributivité. On a manipulé $2(x+3)$ en deux étapes en utilisant la distributivité pour obtenir $2x+6$. On répète ces deux étapes à l'envers pour factoriser $2x+6$ et obtenir $2(x+3)$. Ici, on a factorisé le nombre 2.

Exemple. Factoriser $(x+1)+(2x+2)$:

$$\begin{aligned} (x+1)+(2x+2) &= 1\times \underline{(x+1)}+2\underline{(x+1)} \\ &= \underline{(x+1)}(1+2) \\ &= 3\underline{(x+1)} \end{aligned}$$

Schéma mental. On perçoit que $2x+2$ est multiple de 2, donc que $2x+2=2(x+1)$. Par ailleurs, on sait que $(x+1)$ peut s'écrire $1\times(x+1)$, car la multiplication $1\times$ est implicite. On a donc découvert le facteur commun $(x+1)$ et on peut l'extraire. Il faut comprendre qu'un facteur commun peut être une expression algébrique, car $(x+1)$ a vocation à devenir un nombre. Il doit donc considérer $(x+1)$ comme si c'était un nombre et le mettre en facteur.

Exemple. Factoriser $2a^2+3a$:

$$\begin{aligned} 2a^2+3a &= 2\underline{a}\times a+3\underline{a} \\ &= \underline{a}(2a+3) \end{aligned}$$

Schéma mental. Exceptionnellement, on a écrit $2a^2=2a\times a$. On en déduit que a est le facteur commun et on l'extrait.

Exemple. Factoriser $2(x+2)+3(x+2)$:

$$\begin{aligned} 2(x+2)+3(x+2) &= 2\underline{(x+2)}+3\underline{(x+2)} \\ &= (x+2)(2+3) \\ &= 5(x+2) \end{aligned}$$

4.9. Réduire et ordonner un polynôme

Propriété 87. Réduire un polynôme (une expression comportant des inconnues à la puissance), c'est factoriser les inconnues d'une même puissance.

Exemple. Réduire $2x + 3x$:

$$\begin{aligned} 2x + 3x &= 2\underline{x} + 3\underline{x} \\ &= \underline{x}(2+3) \\ &= 5x \end{aligned}$$

Exemple. Réduire $3x^4 + 2x^4 + 4x^2 - x^2 + 2$:

$$\begin{aligned} 3x^4 + 2x^4 + 4x^2 - x^2 + 2 &= (3+2)x^4 + (4-1)x^2 + 2 \\ &= 5x^4 + 3x^2 + 2 \end{aligned}$$

Schéma mental. On utilise le terme imagé « réduction » car le polynôme raccourcit. Mes professeurs utilisaient aussi l'expression « additionner les pommes avec les pommes et les poires avec les poires », mais l'on ne comprend pas pourquoi les pommes vont avec les pommes et les poires avec les poires. L'explication, c'est que lorsqu'on écrit $3x^4 + 2x^4 = 5x^4$ on factorise les termes en x^4. Cela signifie que l'on additionne les inconnues d'une même puissance entre-elles. On remarque que l'expression n'est pas entièrement factorisée. On a simplement factorisé les termes en x^2 et en x^4 séparément. Le schéma mental est bien d'additionner séparément les x^4, les x^3, les x^2, les x et les nombres.

Propriété 88. Ordonner un polynôme (une expression comportant des inconnues à la puissance), c'est classer les puissances de manière décroissante, donc de la plus grande à la plus petite.

Exemple. Ordonner $x^3 - 3x + 1 - 2x^2$.

Solution : Les puissances apparaissent dans le désordre. Pour les puissances supérieures à 1, l'ordre est évident. Par ailleurs, on remarque que $3x = 3x^1$ et $2 = 2x^0$ (car $x^0 = 1$). Donc $-3x$ est une puissance de 1 et 2 est une puissance de zéro.

On écrit alors $x^3 - 3x + 1 - 2x^2 = x^3 - 2x^2 - 3x + 1$ en classant les puissances par ordre décroissant.

Schéma mental. Ordonner, c'est ranger dans l'ordre, mais encore faut-il indiquer s'il s'agit d'un ordre croissant ou décroissant. Quand on ordonne un polynôme, il s'agit d'un classement dans l'ordre décroissant (de la plus grande puissance à la plus petite puissance). On doit bien se rappeler que $x^1 = x$ et $x^0 = 1$, donc que tout multiple de x est une puissance 1 et tout nombre est une puissance de zéro.

4.10. Développer une expression algébrique

Définition 10. Développer une expression algébrique consiste à appliquer le principe de distributivité à une expression algébrique. Après avoir développé l'expression algébrique, on la réduit et on l'ordonne.

Propriété 89. Formule de la simple distributivité : pour tous nombres a, b et c, on peut écrire $a(b + c) = ab + ac$.

Propriété 90. Formule de la double distributivité : pour tous nombres a, b, c et d, on peut écrire $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Schéma mental. On comprend le schéma mental de la distribution en utilisant des nombres simples, comme dans le cas de sachets de bonbons. Si besoin, on utilise des flèches pour représenter les calculs de la distributivité.

Exemple. Développer $2(x+3)$:

$$\begin{align} 2(x+3) &= 2x + 2\times 3 \tag{1}\\ &= 2x+6 \tag{2}\\ \tag{3}\end{align}$$

Voici les différentes étapes commentées :
(1) J'applique la formule de la simple-distributivité.
(2) Je calcule chaque coefficient. Je vérifie que l'expression algébrique est bien ordonnée et réduite.

Exemple. Développer $(x+3)(5-2x)$:

$$\begin{align} (x+3)(5-2x) &= 5x-2x^2+3\times 5-3\times 2x \tag{4}\\ &= 5x-2x^2+15-6x \tag{5}\\ &= -2x^2-6x+5x+15 \tag{6}\\ &= -2x^2-x+15 \tag{7}\end{align}$$

Voici les différentes étapes commentées :
(4) J'applique la formule de la double-distributivité.
(5) Je calcule chaque coefficient.
(6) J'ordonne l'expression algébrique.
(7) Je réduis l'expression algébrique.

Exemple. Développer $3(x+2)+(x+1)(5-x)$:

$$\begin{align} 3(x+2)-(x+1)(5-x) &= 3x+6-(5x-x^2+5-x) \tag{8}\\ &= 3x+6-(4x-x^2+5) \tag{9}\\ &= 3x+6-4x+x^2-5 \tag{10}\\ &= -x+1+x^2 \tag{11}\\ &= x^2-x+1 \tag{12}\end{align}$$

Voici les différentes étapes commentées :
(8) J'applique la formule de la simple-distributivité à la première expression algébrique $3(x+2)$ et la formule de la double-distributivité à la deuxième expression algébrique $(x+1)(5-x)$. On note la présence de la parenthèse car le calcul $(x+1)(5-x)$ est une multiplication dont on doit calculer le résultat prioritairement.
(9) Je réduis l'expression entre parenthèses.
(10) J'enlève la parenthèse en prenant l'opposé des valeurs s'y trouvant.
(11) Je réduis l'expression algébrique.
(12) J'ordonne l'expression algébrique.

Schéma mental. Le terme « développer » provient du fait qu'on part souvent d'une expression compacte (comme dans les deux premiers cas), pour arriver à une expression développée comportant des additions. Mais cette expression est un faux-ami, car le résultat du développement n'est pas nécessairement une expression plus longue que l'expression d'origine (comme dans le troisième cas). Il est toutefois intéressant de remarquer qu'une expression factorisée est souvent « compacte » par opposition à une expression développée, qui est souvent « plus longue » et composée d'additions, mais sans en faire une généralité.

4.11. Résoudre une équation graphiquement

Quand on fait du calcul algébrique, il est utilise de reconnaître des fonctions de référence, dont on connaît la représentation graphique. La représentation mentale est meilleure et l'on se sent en terrain connu. Se reporter au Terminator Fonctions pour des explications détaillées.

Toutefois, on développera ici le cas de l'équation de droite et de la parabole.

On considère une droite (d) d'équation $y = 2x + 1$ dans un repère orthonormé (O, x, y).

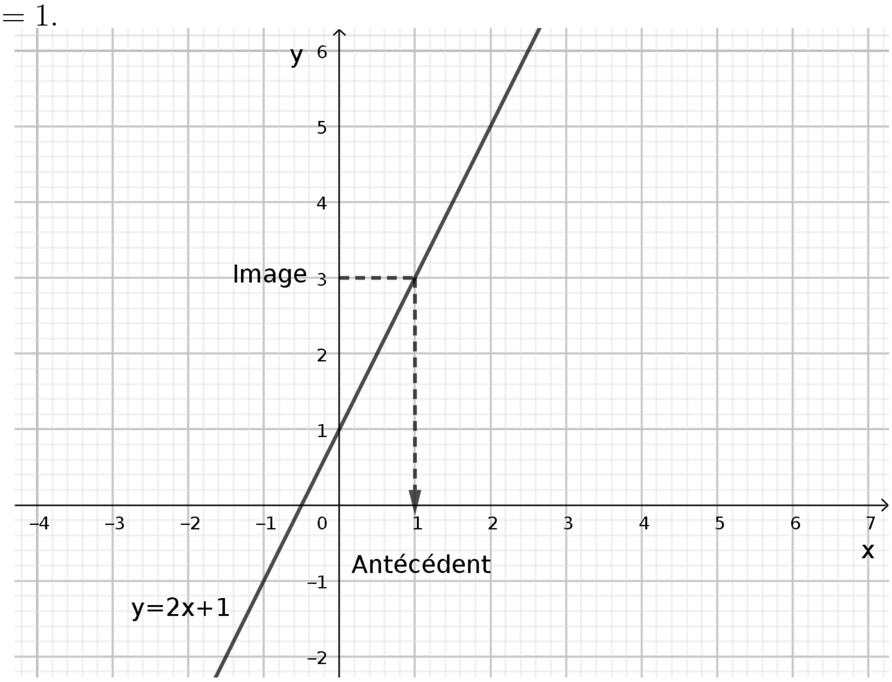
Schéma mental. On sait que dans l'équation $y = 2x + 1$ de la droite (d), le nombre 2 représente le coefficient directeur (ou la pente) de la droite (d), et le nombre 1 indique que l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées (l'axe vertical) se trouve au point $(0; 1)$. On doit donc se représenter mentalement la droite et être capable de la tracer sans trop de difficultés.

Il est utile de rappeler la notion d'antécédent et d'image qui va de pair avec la notion de fonction. On peut considérer la fonction $f(x) = 2x+1$ et l'on a $y = f(x) = 2x+1$. Ainsi, pour tout antécédent x_0, l'image par la fonction f se sera $y = f(x_0)$. On retient que graphiquement l'antécédent se lit sur l'axe des abscisses et l'image à l'intersection avec la droite (d) sur l'axe des ordonnées.

Exemple. Résoudre graphiquement l'équation $2x + 1 = 3$.

Solution : on reconnait l'équation d'une droite (d) d'équation $y = 2x + 1$. On doit donc résoudre graphiquement $y = 2x + 1 = 3$.

Je place l'image d'ordonnée $y = 3$ sur l'axe des ordonnées. Je trace une demi-droite jusqu'à la droite (d). Je lis l'abscisse du point d'intersection sur l'axe des abscisses. La solution est $x = 1$.



Je vérifie que l'équation est bien vérifiée :

— D'une part, dans l'équation à gauche de l'égalité, j'ai $y = 3$.

— D'autre part, dans l'équation à droite de l'équation, j'ai $2x + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$.

Comme j'ai les mêmes valeurs à gauche et à droite de l'égalité, l'équation est bien vérifiée.